LUCRAREA Nr. 6

REZOLVAREA ECUAȚIILOR ŞI SISTEMELOR DE ECUAȚII ALGEBRICE

1) Obiective

Prezentarea şi dezvoltarea modului de rezolvare a ecuațiilor algebrice şi sistemelor de ecuații algebrice utilizând produsul Matlab, cu scopul însuşirii cunoştințelor de către utilizatori.

2) Noțiuni teoretice

2.1. Rezolvarea sistemelor liniare de ecuații

Fie sistemul liniar de n ecuații cu n necunoscute:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ...a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ...a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ...a_{nn}x_n = b_n \end{cases}.$$

Se defineşte matricea coeficienților sistemului astfel:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{bmatrix}, \text{ iar vectorul termenilor liberi } b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Sistemul de n ecuații cu n necunoscute este descris de ecuația matriceală:

$$A \cdot X = b,$$

unde:

- **A** este matricea coeficienților necunoscutelor, cu dimensiunea $n \times n$;

- **b** este matricea termenilor liberi , cu dimensiunea $n \times 1$;
- **X** este matricea necunoscutelor , cu dimensiunea $n \times 1$;.

Rezolvarea sistemului de ecuații presupune determinarea matricei *X*, care conține soluția sistemului de ecuații, deci:

$X = inv(A) \cdot B$ sau $X = A \backslash b$.

Funcția de referință Matlab pentru rezolvarea sistemelor liniare de ecuații este ***linsolve***. Cu această funcție, rezultă matricea *X:*

$X = \text{linsolve}(A,b)$

care conține vectorul coloană al soluțiilor sistemului.

2.2. Rezolvarea ecuațiilor algebrice

Forma generală a unei ecuații algebrice este următoarea:

$$a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + ... + a_1 \cdot x + a_0 = 0,$$

unde:

- ***n*** este gradul ecuației;
- ***a_k*** sunt coeficienții polinomului, care pot fi numere reale sau complexe;
- ***p(x)*** este polinomul asociat ecuației algebrice şi definit prin

$$p(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + ... + a_1 \cdot x + a_0,$$

Rezolvarea ecuației presupune determinarea tuturor rădăcinilor polinomului asociat. Funcția Matlab care determină rădăcinile polinoamelor este ***roots*** şi se apelează cu sintaxa:

R=roots(C)

unde, ***C*** este vectorul linie care conține coeficienții polinomului, în ordine descrescătoare a puterilor variabilei. Prin convenție, MATLAB stochează rădăcinile în vectori coloană

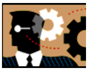
Funcția Matlab ***poly*** determină coeficienții unui polinom ale cărui rădăcini sunt cunoscute. Se apelează cu sintaxa:

C=poly(R)

unde, ***R*** este vectorul coloană care conține rădăcinile polinomului.

Observație:

Funcțiile poly şi roots sunt funcții inverse.



3) Probleme de rezolvat

3.1. Să se rezolve sistemele liniare de ecuații

1) $$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -1 \end{cases}$$

2) $$\begin{cases} \dfrac{\sqrt{2}+1}{3}\cdot x + \sqrt{3}\cdot y + \dfrac{3}{\sqrt[3]{5}}\cdot z = 1 \\ x - \dfrac{1}{\sqrt{7}}\cdot y - \sqrt{e^{\pi}}\cdot z = e \\ \sqrt{11}\cdot y + \sqrt[3]{7}\cdot x + 4\cdot z = 0 \end{cases}$$

3) $$\begin{cases} 3\cdot x + 2\cdot y - 7\cdot z + t = 2 \\ -2\cdot x + 4\cdot z - 2\cdot t + y = 1 \\ -x + 3\cdot t - 2\cdot y + z = -1 \\ 2\cdot t - y + 3\cdot x - 4\cdot z = -3 \end{cases}$$

4) $$\begin{cases} 2.1\cdot u - 4.5\cdot v - 2\cdot t = 19.07 \\ 3\cdot v - 2.7\cdot u + 5.2\cdot t = 2.31 \\ 7\cdot t - 2.7\cdot v + 1.7\cdot u = 0.35 \end{cases}$$

5) $$\begin{cases} \dfrac{2\cdot\pi}{3}\cdot\alpha - \dfrac{7\cdot\pi}{2}\cdot\beta - 3\cdot\pi\cdot\gamma = -\pi \\ \dfrac{5\cdot\pi}{3}\cdot\beta + \pi\cdot\alpha - 2\cdot\gamma = \dfrac{2\cdot\pi}{5} \\ \dfrac{\pi}{2}\cdot\gamma - 2\cdot\alpha + \dfrac{2\cdot\pi}{5}\cdot\beta = 0 \end{cases}.$$

3.2. Să se determine rădăcinile pentru polinoamele

1) $p(x) = x^4 + 5x^3 - 2x - 12$
1) $m(x) := 7 \cdot x^5 + 3 \cdot x^4 - 11 \cdot x^3 + 8 \cdot x^2 + 0.4 \cdot x - 0.9$;
2) $q(x) := 7 \cdot x^4 + 11 \cdot x^3 + 3 \cdot x^2 + 4 \cdot x - 9$;
3) $r(x) := x^3 + (3+2i) \cdot x^2 + (-4+6i) \cdot x - 8i$;
4) $s(x) := x^5 - 2 \cdot x^4 + \sqrt{5} \cdot x^3 + 20 \cdot x^2 - 8 \cdot x + 3$;
5) $t(x) := -\sqrt{3}i \cdot x^4 + 2i \cdot x^3 + 4x^2 + 1$.

3.3. Să se determine coeficienții polinoamelor ale căror rădăcini au fost determinate la §3.2.

4) Probleme rezolvate

4.1. Sisteme liniare de ecuații

Pentru rezolvarea sistemelor liniare de ecuații se parcurg etapele prezentate în §2.1. În continuare, se exemplifică rezolvarea pentru primul sistem de la §3.1.

Programul Matlab, varianta 1:

```
A=[1 -2 1;1 -1 3;-1 2 3];
b=[1;0;-1];
x=inv(A)*b
```

Programul Matlab, varianta 2:

```
A=[1 -2 1;1 -1 3;-1 2 3]
b=[1;0;-1]
x=A\b
```

Programul Matlab, varianta 3:

```
A=[1 -2 1;1 -1 3;-1 2 3];
b=[1;0;-1];
x=linsolve(A,b)
```

Rezultă matricea coloană care conține soluțiile sistemului:

$$x = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

4.2. Ecuații algebrice liniare

Pentru determinarea rădăcinilor unui polinom se procedează conform §2.2. Exemplificare pentru 1) de la §3.2.

Programul Matlab:
c=[1 5 0 -2 -12]
R=roots(c)

Răspuns:

$$R = \begin{bmatrix} \text{-5.0156} \\ \text{-0.6538 + 1.1751i} \\ \text{-0.6538 - 1.1751i} \\ \text{1.3231} \end{bmatrix}.$$

4.3. Determinare coeficienți polinoame

Determinerea coeficienților polinomului *p(x)* ale cărui rădăcini au fost determinate la §4.2.

Programul Matlab:

R=[-5.0156;-0.6538+1.1751i;-0.6538-1.1751i;1.3231]
c=poly(R)

Răspuns:

$$c = \begin{bmatrix} 1.0000 & 5.0000 & -0.0000 & -2.0000 & -12.0000 \end{bmatrix}$$

5) Probleme propuse